Options M et P'

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES I

DURÉE : 4 heures

Cette épreuve comporte deux problèmes indépendants qui peuvent être abordés dans un ordre quelconque.

Quel que soit le réel $x > 0$, $\ln(x)$ représente le logarithme népérien de x.

PREMIER PROBLÈME

Les parties I et II de ce problème sont indépendantes.

I

On considère la fonction f définie sur $]-1, 1[$ par :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f(x) = \frac{\text{Arc sin}(x)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

1. Montrer que f est développable en série entière au point 0.
   (Énoncer avec précision le théorème utilisé.)
2. Trouver une équation différentielle (E), linéaire du premier ordre, vérifiée par f.
   (On écrira cette équation sous la forme : $a(x)\,y' + b(x)\,y = c(x)$; a, b et c étant des polynômes premiers entre eux.)
3. Trouver les solutions de (E) développables en série entière au point 0. On introduira C_{2n}^{n}.
4. Trouver le développement en série entière de f.
   (Énoncer avec précision le théorème utilisé.)

II

On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = n!\,\dfrac{e^n}{n^n\sqrt{n}}$.

1. Trouver un équivalent, quand n tend vers l'infini, de $b_n = \ln\left(\dfrac{a_n}{a_{n-1}}\right)$.
2. En déduire que la limite de a_n, quand n tend vers l'infini, existe.
   On notera L cette limite.
3. Trouver, en fonction de L, un équivalent de $n!$.
4. Trouver, en fonction de L, un équivalent de C_{2n}^{n}.

III

Soit $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_{2n}^n x^n$.

1. Quel est le rayon de convergence R de cette série ?

2. a. Étudier la convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} C_{2n}^n R^n$.

   b. Étudier la convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} C_{2n}^n (-R)^n$.

3. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a^2 + b^2 \neq 0$. Soit F la fonction définie sur $]-R, R[$ par :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad F(x) = (ax + b)\, S'(x).$$

(S' étant la fonction dérivée de S.)

a. Déterminer a et b pour que $F = S$.

b. En déduire S.

SECOND PROBLÈME

Pour tout x réel et pour tout entier naturel n non nul, on note : $P_n(x) = \prod_{k=1}^{n} (1 + x^k)$.

De plus, lorsque $\lim_{n \to +\infty} P_n(x)$ existe, on notera $P(x)$ cette limite.

Si $x \in]-1, 1[$ et k est un entier naturel non nul, on note : $u_k(x) = \ln(1 + x^k)$.

Dans ce problème, on démontrera que P est définie et continue sur $[-1, 1[$ et on précisera son comportement en 1.

1. a est un nombre réel de l'intervalle $]0, 1[$.

   a. Montrer que : $\forall x \in [-a, a], \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad |u_k(x)| \leqslant -\ln(1 - a^k)$.

   b. En déduire que la série $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x)$ est uniformément convergente sur $[-a, a]$ et que :

$$\forall x \in [-a, a], \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left| \sum_{k=1}^{n} u_k(x) \right| \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} -\ln(1 - a^k).$$

   c. Montrer que la suite de fonctions (P_n) est uniformément convergente sur $[-a, a]$.

2. En utilisant les résultats de la question 1, montrer que P est définie sur $[-1, 1[$, continue sur $]-1, 1[$, et à valeurs strictement positives sur $]-1, 1[$.

On considère dès lors que P est définie sur $[-1, 1[$.

3. *Étude du comportement de* P *en* -1.

   a. Établir que : $\forall x \in [-1, 0], \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant P_{2n+2}(x) \leqslant P_{2n}(x)$.

   b. En déduire que P est continue en -1.

4. *Étude du comportement de* P *en* 1.

   Soit y un réel strictement positif.

   a. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \int_{ky}^{(k+1)y} \ln(1 + e^{-t})\,dt \leqslant y u_k(e^{-y}) \leqslant \int_{(k-1)y}^{ky} \ln(1 + e^{-t})\,dt$.

   b. En déduire que : $\int_{y}^{+\infty} \ln(1 + e^{-t})\,dt \leqslant y\left(\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(e^{-y})\right) \leqslant \int_{0}^{+\infty} \ln(1 + e^{-t})\,dt$.

   c. Prouver que : $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(e^{-y}) = \frac{1}{y}\left(\int_0^{+\infty} \ln(1 + e^{-t})\,dt + \varepsilon(y)\right)$, où ε est une fonction définie sur $]0, +\infty[$ telle que $\lim_{y \to 0} \varepsilon(y) = 0$.

   d. En déduire que $\ln(P(x))$ est équivalente au point 1 à $\frac{I}{1 - x}$ où $I = \int_0^{+\infty} \ln(1 + e^{-t})\,dt$.

5. *Calcul de* I.

   On admettra que : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

   a. Calculer $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$.

   b. Montrer que : $\forall t \geqslant 0, \quad \left|\ln(1 + e^{-t}) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} e^{-kt}\right| \leqslant \frac{e^{-(n+1)t}}{n+1}$.

   c. En déduire la valeur de I.